



## SOUTIEN I

CALCULS D'INTÉGRALES, CONVERGENCE DES INTÉGRALES, CALCULS DE SÉRIES.

### INTÉGRATION

**EXERCICE 1** *Primitives.* 1. Donner une primitive des fonctions usuelles suivantes.

a.  $x \mapsto x^n$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ).

c.  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

e.  $x \mapsto e^x$ .

b.  $x \mapsto x^\alpha$  (où  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ).

d.  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

f.  $x \mapsto \ln(x)$ .

2. Trouver une primitive des fonctions polynomiales suivantes.

a.  $x \mapsto 1$ .

c.  $x \mapsto x - x^2 + 3$ .

e.  $x \mapsto x^2(1 + 2x)$ .

b.  $x \mapsto x^2$ .

d.  $x \mapsto x(x + 1)$ .

f.  $x \mapsto 2 + 3x - 4x^2$ .

3. Trouver une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la forme  $u'u^\alpha$ .

a.  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ .

c.  $x \mapsto -(1 - x)^3$ .

e.  $x \mapsto \frac{1}{x} (\ln(x))^3$ .

b.  $x \mapsto 2(2x + 1)^2$ .

d.  $x \mapsto e^x (1 + e^x)^4$ .

f.  $x \mapsto 2x (1 + x^2)^6$ .

4. Trouver une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la forme  $u'e^u$ .

a.  $x \mapsto -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ .

c.  $x \mapsto 6x^2 e^{2x^3}$ .

e.  $x \mapsto \frac{2}{x} e^{1+2\ln(x)}$ .

b.  $x \mapsto 2x e^{x^2}$ .

d.  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ .

f.  $x \mapsto (2x + 1) e^{x^2+x}$ .

5. Trouver une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la forme  $u'e^u$  à une constante près.

a.  $x \mapsto e^{2x}$ .

c.  $x \mapsto e^{x+3}$ .

e.  $x \mapsto e^{-4x+5}$ .

b.  $x \mapsto e^{-x}$ .

d.  $x \mapsto e^{-nx}$ .

f.  $x \mapsto e^{3x+4}$ .

6. Trouver une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la forme  $\frac{u'}{u}$ .

a.  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ .

c.  $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ .

e.  $x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}$ .

b.  $x \mapsto \frac{2x}{x^2+5}$ .

d.  $x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$ .

f.  $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{x^n+1}$ .

**EXERCICE 2** *Calculs.* 1. Calculer les intégrales suivantes avec une primitive de la fonction à intégrer.

$$\begin{array}{llll}
\text{a. } \int_1^2 \frac{dt}{t^2} & \text{e. } \int_0^4 \sqrt{x}(x-2\sqrt{x})dx & \text{h. } \int_1^e \frac{(\ln(s))^5}{s} ds & \text{k. } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(-\frac{3}{v^2})}{v^3} dv \\
\text{b. } \int_e^3 \frac{dx}{x \ln(x)} & \text{f. } \int_0^2 z^4 e^{-z^5} dz & \text{i. } \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2} dt & \text{l. } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4} dq \\
\text{c. } \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx & & & \\
\text{d. } \int_0^2 |x^2-3x+2| dx & \text{g. } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} E(x) dx & \text{j. } \int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}} dx & \text{m. } \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx
\end{array}$$

2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

$$\begin{array}{lll}
\text{a. } \int_{-1}^1 x e^{3x} dx & \text{d. } \int_1^{e^2} (2x^3+1) \ln(x) dx & \text{f. } \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt \\
\text{b. } \int_1^4 \sqrt{3s} \ln(s) ds & & \text{g. } \int_1^2 (1+2s) \ln\left(1+\frac{1}{s}\right) ds \\
\text{c. } \int_1^e z^2 (\ln(z))^3 dz & \text{e. } \int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x} dx &
\end{array}$$

3. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables indiqué (ou d'un changement affine si rien n'est indiqué).

$$\begin{array}{ll}
\text{a. } \int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt & \text{d. } \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} \text{ (avec } u = s^3\text{).} \\
\text{b. } \int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8} dt \text{ (avec } u = t^3+8\text{).} & \text{e. } \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt \text{ (avec } u = \sqrt{t}\text{).} \\
\text{c. } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx \text{ (avec } t = \frac{x}{x+1}\text{).} & \text{f. } \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}} \text{ (avec } u = \ln t\text{).}
\end{array}$$

### EXERCICE 3

Étudier la nature et calculer (lorsque c'est possible) les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1. I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-2t+3} dt & 3. I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2u+3} du \\
2. I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt \text{ (hors programme)} & 4. I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^\alpha} dt \\
& \text{avec } \alpha \neq 1.
\end{array}$$

### EXERCICE 4

Étudier la convergence des intégrales suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

$$\begin{array}{ll}
1. I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt & 4. I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{x^4+1} dx \\
2. I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1} & 5. I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+t^2+1} dt \\
3. I_3 = \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u} du & 6. I_7 = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+t}{t+t^2} dt
\end{array}$$

## CALCULS DE SOMME

**EXERCICE 5** *Sommes géométriques et dérivées.*

Calculer les sommes suivantes (on admet qu'elles convergent).

1.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$

3.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}.$

5.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$

2.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3}.$

4.  $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}.$

6.  $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 (\ln(2))^k.$

**EXERCICE 6** *Sommes exponentielles.*

Calculer les sommes suivantes (on admet qu'elles convergent).

1.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}.$

3.  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^k}{k!}.$

2.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$

4.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!}.$

**EXERCICE 7** *Sommes télescopiques.*

Calculer les sommes partielles suivantes en repérant un télescopage. Puis discuter de la convergence de la série.

1.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}.$

3.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$

5.  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right).$

2.  $\sum_{k=5}^n \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2}.$

4.  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$

6.  $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right).$

**EXERCICE 8**

Il existe trois types de théorèmes de comparaison. Rédiger parfaitement un argument de comparaison sur un exemple au choix pour chacune des trois versions.

**EXERCICE 9**

Prouver la divergence ou la convergence des séries suivantes avec un argument de comparaison. Préciser pour chacune des séries de quelle type de comparaison il s'agit.

1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{ne^n}.$

4.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$

7.  $\sum_{n \geq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right).$

2.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \ln(n)}.$

5.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n+3^n}{1+5^n}.$

8.  $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{1+e^{-n}} - 1).$

3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \ln(n)}.$

6.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+n!}.$

9.  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right).$